連分数展開

$a_1=1,\ a_{n+1}=1+\dfrac{1}{1+a_n}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）で定義される数列$\{a_n\}$の一般項は求められる。

具体的には，特性方程式 $x=1+\dfrac{1}{1+x}$ の解$\alpha=\sqrt{2}$，$\beta=-\sqrt{2}$ を用いて，

$$a_n=\frac{\alpha(1-\beta)^n-\beta(1-\alpha)^n}{(1-\beta)^n-(1-\alpha)^n}=\sqrt{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}\cdot\frac{1+(2\sqrt{2}-3)^n}{1-(2\sqrt{2}-3)^n}$$

と表される。

これを，分数の計算せずにそのまま書き表せば，

$$a_3=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}\left(=\frac{7}{5}\right),\quad a_4=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}\left(=\frac{17}{12}\right),\quad a_5=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}\left(=\frac{41}{29}\right),\quad\cdots$$

となる。これを繰り返していくと a_n の値は$\sqrt{2}$に近づいていく。なぜならば $r=\dfrac{1-\alpha}{1-\beta}$ とおくと，$|r|=(\sqrt{2}-1)^2<0.2$ であるから，r^n は n を限りなく大きくすると 0 に近づく（$n=10$ のとき，$0.2^{10}=\dfrac{2^{10}}{10^{10}}\fallingdotseq\dfrac{10^3}{10^{10}}=0.0000001$）。すなわち，$a_n=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1+r^n}{1-r^n}$ は $\sqrt{2}$ に近づく。

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

を$\sqrt{2}$の連分数という。一般に，

$$b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\cfrac{c_3}{b_3+\cfrac{c_4}{b_4+\ddots}}}}\quad\cdots ①$$

の形の分数を連分数（continued fraction）という。①を，$b_0+\dfrac{c_1}{b_1}\underset{+}{}\dfrac{c_2}{b_2}\underset{+}{}\dfrac{c_2}{b_3}\underset{+}{}\cdots\cdots$ と，2 番目以降の“+”を下げて表すこともある。特に，$c_1=c_2=c_3=\cdots\cdots=1$ のとき，$[b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots]$ と表すことが多い。この表記を用いると，$\sqrt{2}=[1,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots]$ である。これを循環小数にならって，$\sqrt{2}=$「$1,\ \dot{2}$] とかく。上の数列$\{a_n\}$の計算からわかるように，$\sqrt{2}$の連分数展開を途中で止めると，$\sqrt{2}$の近似値になっている。実際に，

$a_4=\dfrac{17}{12}\fallingdotseq1.417$，$a_5=\dfrac{41}{29}\fallingdotseq1.4138$，$a_6=\dfrac{99}{70}\fallingdotseq1.41429$，□　　である。

実数αについて，$\alpha=b_0+\dfrac{1}{\alpha_1}$，$\alpha_1=b_1+\dfrac{1}{\alpha_2}$，□，$\alpha_n=b_n+\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$，□を満たすように整数 b_0 と正の整数 $b_1,\ b_2,\ \cdots$ を定めることによって，実数αの連分数展開が得られる。

$\sqrt{3}$を連分数展開して，$\sqrt{3}$の近似値を求めてみよう。

$\sqrt{3}=1+\dfrac{1}{\alpha_1}$，$\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=1+\dfrac{1}{\alpha_2}$，$\alpha_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1=2+\dfrac{1}{\alpha_3}$，

$\alpha_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$，…… となり，$\sqrt{3}=[1,\ \dot{1},\ \dot{2}]$ である。

$[1,\ 1,\ 2]=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{5}{3}$，$[1,\ 1,\ 2,\ 1]=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1}}}=\dfrac{7}{4}$，

$[1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2]=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}=\dfrac{19}{11}\fallingdotseq 1.7273\cdots\cdots$

である。このようにして，無理数の近似値を求めることもできる。

（参考文献　岩波講座 現代数学への入門　代数入門１　上野健爾著）